

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.

5 класс, заключительный этап. 13 февраля 2021 года

Решения задач

1. Расставьте цифры 1, 3, 0, 2, 2, 0, 2, 1 (по одной цифре в каждом прямоугольнике) в прямоугольники так, чтобы разность была максимально возможной. Чему равна эта разность?

$$\square\square\square\square - \square\square\square\square$$

Четырехзначное число не может начинаться с нуля.

Ответ. $3222-1001=2221$.

2. Четыре пятиклассника — две девочки и два мальчика — собирали орехи. Один из них собрал 45 орехов, другой — 55, а третий — 100 орехов. Четвертый тоже собрал несколько орехов, но не больше всех. Сколько орехов собрал четвертый пятиклассник, если мальчики в сумме собрали столько же, сколько и девочки? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 90 орехов.

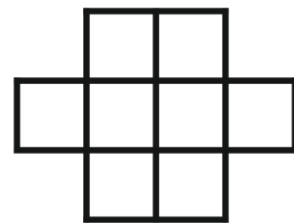
Решение. Из троих известных нам пятиклассников двое — одного пола. Если это первый и второй, то в сумме они собрали 100 орехов — столько же, сколько и третий. Тогда четвертый ничего не собрал — противоречие. Если это второй и третий, то в сумме они собрали 155 орехов, тогда четвертый собрал $155-45=110$ орехов, но это больше, чем у остальных — противоречие. Если же это первый и третий, то в сумме они собрали 145, тогда четвертый собрал $145-55=90$ орехов. Этот ответ подходит.

3. Костя поехал в школу на велосипеде со скоростью 12 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Костя проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Костя шел пешком? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. 8 км/ч.

Решение. Допустим, что Костя проезжает весь путь со скоростью 12 км/ч за время $6t$. Первую треть пути он проехал за $2t$ времени. Когда Костя проехал треть пути, ему оставалось ехать еще $4t$ времени. Увеличив скорость вдвое, Костя на вторую треть пути потратил время t , вместо $2t$. Следовательно, последнюю треть пути он шел $3t$. А значит, он шел втрое медленнее, чем 24 км/ч, то есть, со скоростью 8 км/ч.

4. В каждой квадратной области на карте острова (см. рисунок) живет или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжет. Однажды каждый житель острова заявил: «Среди моих соседей не более одного рыцаря». Соседями считаются жители квадратов, имеющих общую сторону. Какое наибольшее число рыцарей может жить на острове? *Не забудьте доказать, что это наибольшее количество.*

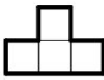


Ответ. 6 рыцарей.

Решение. В крайних слева и справа клетках обязательно живут рыцари, так как у них только один сосед. Если в ряд из трех клеток поселить три рыцаря, то у центрального будет как минимум два соседа-рыцаря, что противоречит высказыванию «Среди моих соседей не более одного рыцаря». Следовательно, в каждом вертикальном ряду из трех клеток живет не более двух рыцарей. Таким образом получаем оценку на 6 рыцарей. Пример на 6 рыцарей на рисунке.



Замечание. Оценку еще можно доказать, заметив, что в каждой половине (левой и правой) обязан быть минимум один лжец, так как если в фигуре

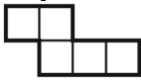
вида  все рыцари, то живущий в центральной клетке не может заявить, что среди его соседей не более одного рыцаря.

5. На математический кружок ходят несколько мальчиков и девочек, среди них Аня и Катя. Аня дружит с 10 мальчиками, а Катя — с 8 мальчиками. Известно, что каких бы троих мальчиков ни выбрать, каждая девочка из кружка дружит хотя бы с одним из них. Сколько всего мальчиков могло быть на кружке? *Найдите все варианты.*

Ответ. 10.

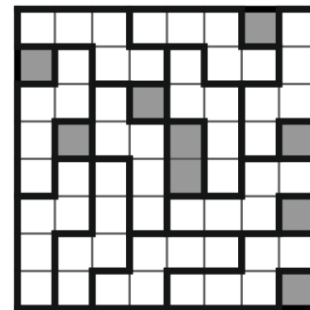
Решение. Из условия ясно, что на кружке есть хотя бы 10 мальчиков. Если же их больше 10, то среди них есть хотя бы три мальчика, каждый из которых не дружит с Катей — противоречие.

6. Можно ли в квадрате 8×8 закрасить ровно 32 клетки так, чтобы в любой

фигурке вида  (в том числе повернутой или перевернутой) закрасенных клеток было больше, чем незакрашенных?

Ответ. Нельзя.

Решение. В квадрате 8×8 можно выделить 11 непересекающихся фигурок указанного вида, например, как показано на рисунке. В каждой из них должно быть хотя бы 3 закрашенные клетки. Итого закрашенных клеток хотя бы 33, что больше требуемого.



Замечание. На самом деле, в квадрате 8×8 можно разместить даже 12 непересекающихся фигурок указанного вида. Метод расстановки объектов подобным образом иногда называют «методом пропеллера». Таким образом, закрашенных клеток будет даже не менее 36. Понятно, что 13 и больше пятиклеточных фигур в этом квадрате разместить невозможно, так как его площадь меньше 65.

