

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.
7 класс, заключительный этап. 13 февраля 2021 года**

Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

Предварительные результаты будут опубликованы 19 февраля. Заявления на апелляцию принимаются до 22.00 22 февраля. Подробности на сайте kazan-math.info.

1. Разрежьте прямоугольник 3×9 по линиям сетки на пять различных клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы. Фигурки считаются различными, если их невозможно совместить наложением. *Достаточно привести один пример.*
2. Двоечнику Васе нужно сложить две правильные дроби, одну — со знаменателем 7, а другую — со знаменателем 11. Вася сложил числители и перемножил знаменатели. В результате он получил ответ, который был в 8 раз меньше правильного. Какие дроби могли быть у Васи изначально? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*
3. Два поезда курсируют по железной дороге между Манчестером и Ливерпулем. Каждый из них ездит с постоянной скоростью, причем скорость первого на 25% выше скорости второго. Приехав в какой-то из этих городов, каждый поезд стоит ровно 15 минут, а затем едет обратно. В 9:00 первый поезд вышел из Ливерпуля, а второй — из Манчестера. В 14:00 они оба впервые оказались **одновременно** в Манчестере. Сколько времени тратит первый поезд на то, чтобы проехать из одного города в другой? *Обоснуйте свой ответ.*
4. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние этой лампочки и какой-то одной из двух соседних с ней. Изначально все лампочки выключены. Петя знает про каждый выключатель, какие именно две лампочки он переключает. Докажите, что при любом n он всегда сможет включить не менее $2/3$ всех лампочек, независимо от схемы работы выключателей.
5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$), в котором $\angle BAC = 20^\circ$, проведена биссектриса BD . Докажите, что $AD = BD + BC$.
6. Можно ли расставить числа $0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots, 97, 97, 98, 98$ (каждое число встречается ровно по два раза) по кругу в каком-то порядке так, чтобы между каждыми двумя числами, равными k , стояло ровно k других чисел? (В частности, чтобы между двумя нулями не было других чисел, между двумя единицами стояло ровно одно число, между двумя двойками — ровно два числа и т.д.). *Обоснуйте свой ответ.*

**Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.
7 класс, заключительный этап. 13 февраля 2021 года**

Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

Предварительные результаты будут опубликованы 19 февраля. Заявления на апелляцию принимаются до 22.00 22 февраля. Подробности на сайте kazan-math.info.

1. Разрежьте прямоугольник 3×9 по линиям сетки на пять различных клетчатых фигурок, периметры которых одинаковы. Фигурки считаются различными, если их невозможно совместить наложением. *Достаточно привести один пример.*
2. Двоечнику Васе нужно сложить две правильные дроби, одну — со знаменателем 7, а другую — со знаменателем 11. Вася сложил числители и перемножил знаменатели. В результате он получил ответ, который был в 8 раз меньше правильного. Какие дроби могли быть у Васи изначально? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*
3. Два поезда курсируют по железной дороге между Манчестером и Ливерпулем. Каждый из них ездит с постоянной скоростью, причем скорость первого на 25% выше скорости второго. Приехав в какой-то из этих городов, каждый поезд стоит ровно 15 минут, а затем едет обратно. В 9:00 первый поезд вышел из Ливерпуля, а второй — из Манчестера. В 14:00 они оба впервые оказались **одновременно** в Манчестере. Сколько времени тратит первый поезд на то, чтобы проехать из одного города в другой? *Обоснуйте свой ответ.*
4. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние этой лампочки и какой-то одной из двух соседних с ней. Изначально все лампочки выключены. Петя знает про каждый выключатель, какие именно две лампочки он переключает. Докажите, что при любом n он всегда сможет включить не менее $2/3$ всех лампочек, независимо от схемы работы выключателей.
5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$), в котором $\angle BAC = 20^\circ$, проведена биссектриса BD . Докажите, что $AD = BD + BC$.
6. Можно ли расставить числа $0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots, 97, 97, 98, 98$ (каждое число встречается ровно по два раза) по кругу в каком-то порядке так, чтобы между каждыми двумя числами, равными k , стояло ровно k других чисел? (В частности, чтобы между двумя нулями не было других чисел, между двумя единицами стояло ровно одно число, между двумя двойками — ровно два числа и т.д.). *Обоснуйте свой ответ.*