
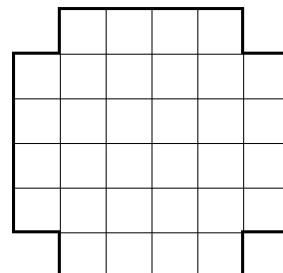
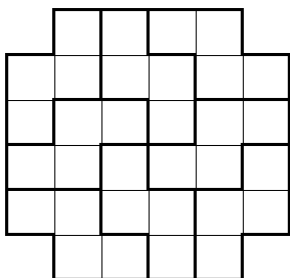


Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
4 класс, финальный тур. 28 января 2023 года. Решения задач

1. Разрежьте без остатка фигуру на рисунке на фигурки . Фигурки могут быть повернуты и перевернуты. *Достаточно привести один пример.*

Решение: Один из двух возможных примеров:



2. Семь друзей написали контрольную работу. Каждая из девочек получила оценку выше, чем каждый из мальчиков. Лена была единственной, кто получил тройку. Сумма оценок всех остальных девочек в четыре раза больше, чем сумма оценок всех мальчиков. Сколько всего было девочек среди друзей? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: Пять девочек.

Решение: У всех мальчиков оценки ниже, чем у любой из девочек, поэтому мальчики получали только двойки, а девочки, кроме Лены, только оценки 4 и 5.

Если мальчиков было 0 или 1, то девочек, кроме Лены, было хотя бы пять. Тогда у мальчиков сумма оценок не больше 2, а у девочек, кроме Лены, сумма оценок не меньше, чем $4 \cdot 5 = 20$. В таком случае сумма оценок девочек более, чем в 4 раза превышает сумму оценок мальчиков, что противоречит условию.

Если мальчиков хотя бы 3, то девочек, кроме Лены, не больше трёх. Тогда сумма оценок у мальчиков не меньше, чем $3 \cdot 2 = 6$, а сумма у девочек должна быть в четыре раза больше, т.е. не меньше, чем 24. Но наибольшая сумма оценок у девочек может быть $3 \cdot 5 = 15$, противоречие.

Значит мальчиков ровно два, а девочек — пять.

Пример для пяти девочек: два мальчика с оценками «2», одна девочка с «3», четыре девочки с оценками «4».

3. Аня, Боря, Вика и Гена сидели за круглым столом. Они по очереди высказали следующие утверждения.

Аня: «Справа от меня сидит девочка».

Боря: «Напротив меня сидит мальчик».

Вика: «Гена сидит по правую руку от меня».

Гена: «Одна из девочек врёт».

В каком порядке дети сидят за столом, если известно, что солгал только один ребёнок? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: Начиная с Ани в правую сторону от неё: Аня, Гена, Вика, Боря.

Решение: Если Аня говорит правду, то обе девочки за столом сидят рядом, но тогда оба мальчика также сидят рядом, и поэтому Боря лжёт. Но поскольку солгал только один ребёнок и это Боря, то утверждение Гены также ложно. Противоречие.

Значит Аня — единственная, кто лжёт. Тогда из утверждения Бори мы понимаем, что мальчики сидят напротив друг друга, а значит и девочки сидят друг напротив друга. Тогда напротив Ани сидит Вика, справа от Вики, по её утверждению, Гена, а слева от Вики остаётся Боря.

4. В стихотворении после каждой гласной буквы идёт ровно три согласные. Согласных, после которых следующая буква — гласная, на 50 меньше, чем согласных, после которых следующая буква — согласная. Сколько всего может быть букв в этом стихотворении, если известно, что седьмая буква — гласная? *Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.*

Ответ: 186 или 198 букв.

Решение: Согласные, после которых следует согласная, назовём буквами I вида, а согласные, после которых следует гласная — буквами II вида.

Между гласной и следующей гласной буквой идёт ровно три согласные, в каждом таком промежутке букв I вида на 1 больше, чем букв II вида. Рассмотрим случаи, какой по номеру может оказаться первая гласная буква.

1 случай: буква под номером «7» является первой гласной. Перед первой гласной букв I вида на 4 больше, чем II вида. После последней гласной буквы букв I вида на 2 больше, чем букв II вида (последняя буква стихотворения — ни I, ни II вид). Тогда среди оставшихся букв имеется на 44 больше букв I вида, чем букв II вида. Следовательно, промежутков между гласными ровно 44. Тогда гласных букв всего 45, а согласных — $6 + 44 \cdot 3 + 3 = 141$. В итоге 186 букв.

2 случай: перед буквой под номером «7» есть ещё гласные. Тогда под номером «3» — гласная и перед ней других гласных быть не может. Тогда перед первой гласной букв I и II вида поровну. После последней гласной буквы, букв I вида на 2 больше, чем II вида. Тогда в промежутках букв I вида на 48 больше, чем букв II вида, значит промежутков между гласными 48, а гласных 49. Тогда всего букв — $49 + 2 + 48 \cdot 3 + 3 = 198$.

5. Можно ли расставить восемь цифр сегодняшней даты (28.01.2023) в оставшиеся клетки таблицы 3×3 на рисунке так, чтобы сумма цифр во всех столбцах и во всех строках была одинаковой? *Обоснуйте свой ответ.*

	6	

Ответ: Не могло.

Решение: Допустим, что так удалось расставить цифры. Тогда сумма чисел во всей таблице равна $6 + 2 + 8 + 0 + 1 + 2 + 0 + 2 + 3 = 24$. Тогда сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна 8. Следовательно, в одном столбце с цифрой «8» должны находиться обе цифры «0». Но тогда в строке с цифрой «8» сумма будет больше 8, чего быть не должно.

6. В магазине продаются гантели четырёх цветов. Гантели одного цвета весят одинаково, но наклейки, на которых были написаны веса гантель, потерялись. Аким может поднять: 1) три красные гантели, 2) одну синюю и две жёлтые. При этом он не может поднять 3) одну синюю и две красные, 4) четыре жёлтые, 5) одну синюю и одну зелёную. Могут ли веса гантель быть равны 16, 14, 10 и 7 килограммов в каком-то порядке? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ: Не могло.

Решение: Любой вес, который может поднять Аким легче, чем любой вес, который он поднять не может. Будем обозначать веса гантель по первой букве их цвета.

Заметим, что $3к$ легче, чем $с + 2ж$, значит $к < с$.

$с + 2ж < с + 2к$, тогда $ж < к$.

$с + 2ж < 4ж$, тогда $с < 2ж$.

$с + 2ж < с + з$, тогда $2ж < з$.

Тогда веса гантель должны следовать так в порядке убывания: $з > с > к > ж$, и соответственно быть равны $з = 16$, $с = 14$, $к = 10$, $ж = 7$, но тогда неверно, что $2ж > с$. Следовательно, такого быть не могло.