

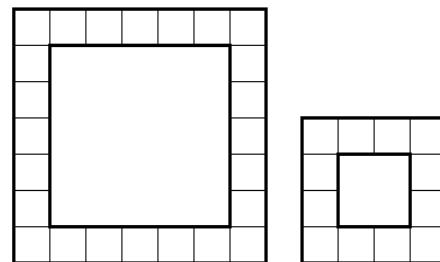
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан.

5 класс, заключительный этап. 10 февраля 2024 года. Решения задач

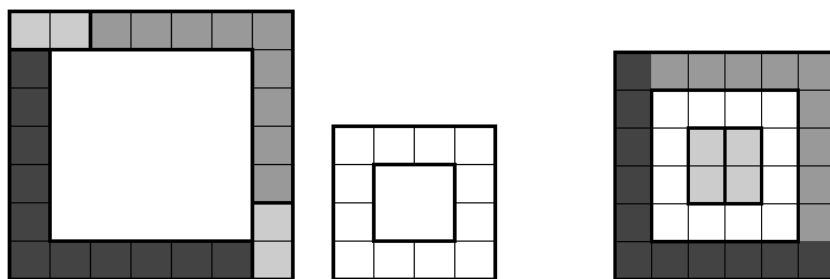
Время выполнения заданий — 180 минут

Максимальный балл — 42

1. Есть рамка квадрата 7×7 толщиной в одну клетку и рамка квадрата 4×4 толщиной в одну клетку. Требуется провести несколько разрезов по линиям клеток так, чтобы всего получилось пять частей. Потом из этих частей нужно составить клетчатый квадрат без пропусков и наложений. Достаточно привести один вариант решения.



Решение. Можно разрезать фигуры на пять частей и сложить квадрат, например, следующим образом:



2. Два мальчика и три девочки пришли в магазин купить несколько ручек. Каждый мальчик купил себе по две чёрные ручки, а каждая девочка купила себе одну красную ручку. Оказалось, что девочки потратили в сумме в два раза больше денег, чем потратили оба мальчика в сумме. Что обойдется дешевле: набор из 27 красных ручек или набор из 70 чёрных ручек? Обоснуйте свой ответ.

Ответ. Набор из 70 чёрных ручек.

Решение. Из условия мы понимаем, что четыре чёрные ручки обошлись в два раза дешевле, чем три красные ручки. Поэтому стоимость трёх красных ручек такая же, как и у восьми чёрных ручек. 27 красных ручек стоят дороже в 9 раз, а, значит, стоят столько же, сколько и 72 черные ручки. Следовательно, 70 чёрных ручек дешевле.

3. На соревновании разыгрывались 10 золотых, 10 серебряных и 10 бронзовых медалей. Известно, что медаль за первое место весит 18 граммов, медаль за второе место весит вдвое легче, чем за первое место, а медаль за третье место весит втрое легче, чем за первое место. Можно ли разделить все эти медали между тремя командами так, чтобы суммарный вес медалей у каждой команды оказался одинаковым? Если можно, то приведите пример распределения. Если нельзя, то объясните почему.

Ответ. Нельзя.

Решение. Вес золотой медали 18 граммов, тогда серебряной — 9 граммов, бронзовой — 6 граммов. Следовательно, общий вес медалей $10 \cdot (18 + 9 + 6) = 330$ граммов. Если нам удалось бы разделить медали поровну по весу, то каждой команде досталось бы медалей суммарным весом 110 граммов. Но вес каждой медали делится на 3, а 110 не делится.

4. На карусели катаются Аня, Богдан, Вика, Гена, Даша и Егор. Дети высказали следующие утверждения:

Аня: «Рядом с Егором нет девочки»;

Богдан: «Даша и Аня сидят через одного человека»;

Вика: «Я не рядом ни с Геной, ни с Егором»;

Гена: «Богдан едет сразу за Аней»;

Даша: «Богдан сидит напротив Гены»;

Егор: «Кто-то из девочек врёт».

В каком порядке дети катаются, если известно, что только один ребёнок соврал?

Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ. По кругу по направлению движения: Аня, Вика, Даша, Гена, Егор, Богдан.

Решение. Можно считать, что карусель движется по часовой стрелке. Либо врёт Егор, либо из его утверждения следует, что врёт кто-то из девочек. Следовательно, остальные мальчики в любом случае говорят правду. Из утверждения Богдана следует, что Даша и Аня сидят через одного человека. Рассмотрим два случая.

1 случай. Если Аня сидит от Даши по часовой стрелке через одно место. Тогда между Дашей и Аней сидит Богдан по утверждению Гены. Тогда утверждение Ани верным быть не может, так как, чтобы рядом с Егором не было девочек, его должны окружать только Гена и Богдан. Также верным не может быть утверждение Вики, так как на оставшиеся три подряд идущих места претендуют только Вика, Гена и Егор. А, значит, уже есть два неверных утверждения.

2 случай. Если Даша сидит от Ани по часовой стрелке через одно место. Тогда Даша сидит напротив Богдана, а, значит, утверждение Даши истинным быть не может. Егор должен сидеть между мальчиками по утверждению Ани. Но такое место только одно — первое от Богдана против часовой стрелки, и тогда на следующем месте против часовой стрелки сидит Гена. Получается единственный вариант, который подходит под все условия, кроме утверждения Даши.

5. Пять тарелок расположены по кругу. Можно ли расположить на тарелках 29 яблок так, чтобы на разных тарелках было разное число яблок и на каждой тарелке количество яблок было равно или сумме, или разности количества яблок на соседних тарелках? *Если можно, то приведите пример расположения. Если нельзя, то объясните, почему.*

Ответ. Нельзя.

Решение. Если на всех тарелках лежало бы чётное число яблок, то общее количество яблок было бы чётным, но 29 не делится на 2. Следовательно, есть тарелка с нечётным числом яблок (будем обозначать как Н). Заметим, что ее соседи — тарелки с числом яблок разной чётности, иначе их сумма или разность была бы чётной. Для определенности будем считать, что ситуация сейчас такая: ЧНН (если они стоят в обратном порядке, то рассуждения аналогичны). После ЧНН пойдет Ч, так как сумма и разность двух нечётных чисел — чётна. После ЧННЧ пойдет Н по тем же соображениям. Но тогда у последнего нечётного числа оба соседа — чётные, чего быть не должно.

6. Аня, Боря, Витя, Галя и Дима пришли в гости к Яне. У каждого гостя и у Яны есть пара кроссовок, причём у разных детей — разных размеров. Уходя из гостей, каждый из друзей надел один левый и один правый кроссовок разных размеров. Только у Гали левый кроссовок оказался больше правого. Боря и Витя пожаловались, что один надетый кроссовок для них оказался маленьким, а второй — большим. Могли ли после ухода друзей Яне остаться два кроссовка одного размера? *Обоснуйте свой ответ.*

Ответ. Не могли.

Решение. Допустим противное, что после ухода друзей остались кроссовки одного размера. Тогда у всех ушедших друзей присутствуют всего пять различных размеров по два кроссовка каждого (левый и правый). Обозначим все размеры кроссовок от 1 до 6 по увеличению размера. Один из этих размеров остался у Яны. У всех друзей, кроме Гали, правый кроссовок больше, чем левый хотя бы на 1 размер, а у Бори и Вити — хотя бы на 2 размера. Тогда сумма разностей «размер правого кроссовка – размер левого кроссовка» у всех четверых, кроме Гали, не меньше, чем 6. Но у Гали разность «размер левого кроссовка – размер правого кроссовка» не может быть больше, чем $5 = 6 - 1$. Таким образом, сумма левых размеров кроссовков у друзей меньше, чем сумма правых размеров, чего быть не может.